

Roteiro da Aula 12 - Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Objetivos de Aprendizagem

- Entender o problema da determinação dos coeficientes a e b que melhor representam a relação linear entre duas variáveis aleatórias (na forma $y = ax + b$) a partir de um conjunto de dados experimentais [1].
- Compreender o conceito estatístico de minimização dos desvios quadráticos para encontrar a melhor reta de ajuste, evitando a subjetividade do traçado manual [2-4].
- Aprender a calcular os parâmetros (coeficiente angular e coeficiente linear) utilizando as fórmulas do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) [4-6].
- Aplicar o MMQ em dados experimentais práticos (ex: Movimento Retilíneo Uniforme - MRU) e comparar os resultados analíticos com a extração de dados pelo Método Gráfico (MG) [5, 7-9].

Metodologia Proposta

A abordagem sugerida pelas notas e apostilas foca em uma sequência teórico-prática para a modelagem de dados de laboratório:

- Introdução Teórica e Problemática:** Apresentação da necessidade do ajuste de curvas (regressão linear) em ciências experimentais. Destaca-se a importância de que os estudantes entendam e verifiquem a validade das fórmulas antes de utilizar algoritmos computacionais prontos como "caixas-pretas" [1, 10].
- Desenvolvimento Matemático:** Demonstração do modelo. Apresentação da função dos desvios $f(a,b) = \sum (y_i - ax_i - b)^2$ e das equações deduzidas para encontrar os coeficientes que minimizam essa função [2, 4].
- Aplicação Prática Guiada (Exemplo do MRU):** Resolução passo a passo de um conjunto de dados medidos de posição (x) e tempo (t), efetuando a construção das tabelas de somatórios ($\sum x$, $\sum t$, $\sum t^2$, $\sum x \cdot t$) essenciais para alimentar as equações [5, 7].
- Comparação de Métodos:** Cálculo da reta traçada visualmente por meio da escolha de dois pontos arbitrários (Método Gráfico) e a sobreposição das duas retas (MMQ e MG) no mesmo gráfico para análise de precisão [8, 9].

Sumário Estruturado do Conteúdo Teórico

1. O Problema da Regressão Linear

Ao representar graficamente uma sucessão de pontos experimentais que apresentam um comportamento linear, diferentes experimentadores podem traçar diferentes retas "a olho" que acompanham a tendência, resultando em diferentes valores para os coeficientes. O Método dos Mínimos Quadrados busca resolver essa ambiguidade determinando, de forma analítica, os melhores estimadores para a relação linear $y = ax + b$ [1, 2, 10]. Em situações onde o fenômeno inicial não é linear (como leis de potência ou exponenciais), o experimento deve primeiro passar por uma linearização (por troca de variáveis ou propriedades logarítmicas) antes da aplicação do MMQ [10-12].

2. O Princípio dos Mínimos Quadrados

O método estabelece um critério analítico de erro: a "melhor reta" deve ser aquela em que a soma dos quadrados das diferenças (resíduos ou desvios) entre os valores reais medidos experimentalmente y_i e os

valores estimados pela equação da reta $(ax_i + b)$ seja a menor possível. Em termos matemáticos, busca-se os parâmetros a e b que minimizam a função: $f(a,b) = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2$ [2-4].

3. Fórmulas para os Coeficientes

A partir da minimização desta função em relação às variáveis de interesse, obtêm-se as expressões clássicas para o cálculo dos parâmetros da reta que melhor ajusta os dados [4-6]:

- **Coeficiente Angular (a ou A):** $a = \frac{N \sum (x \cdot y) - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$
- **Coeficiente Linear (b ou B):** $b = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum x \sum (x \cdot y)}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$ (Obs: N corresponde ao número total de pares de pontos medidos no experimento).

4. Contraste com o Método Gráfico (MG)

No Método Gráfico clássico, traça-se uma reta de ajuste visual tentando compensar os desvios. O coeficiente angular é determinado por $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, utilizando obrigatoriamente dois pontos arbitrários que pertencem à *reta traçada*, e nunca os pontos dispersos da tabela. Recomenda-se escolher pontos distantes para diminuir o erro no cálculo. O coeficiente linear b é obtido substituindo-se os dados de um dos pontos, ou pela leitura direta do eixo vertical (extrapolação) [8, 13]. Comparar o MG ao MMQ permite que os alunos compreendam visual e algebricamente o processo de otimização no tratamento de dados experimentais [8, 9].